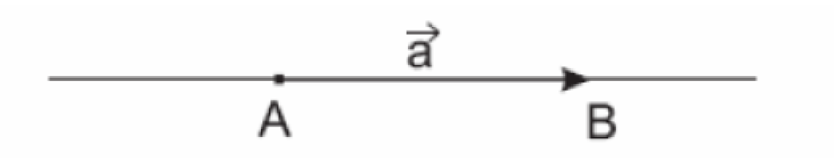
Vektori u ravni

Najjednostavnije rečeno, **vektori su usmerene duži.**
Osnovne karakteristike vektora su :

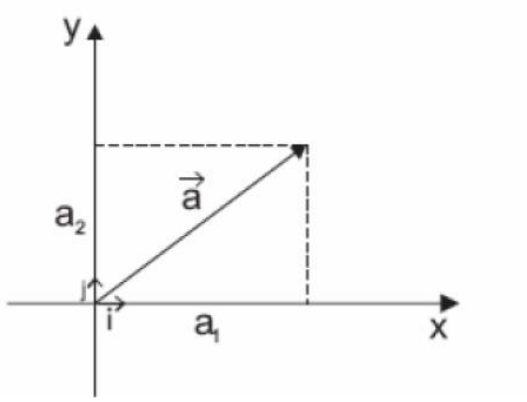
- **pravac**
- **smer**
- **intenzitet**

Pravac vektora je prava na kojoj se on nalazi ali i sve prave paralelne sa njom, što vektoru dozvoljava da "skače" sa jedne na drugu paralelnu pravu.
Smer vektora se zadaje strelicom.

Intenzitet vektora je njegova dužina i najčešće se obeležava sa $|\vec{a}|$



A je početak a B je kraj vektora . Obeležava se $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$



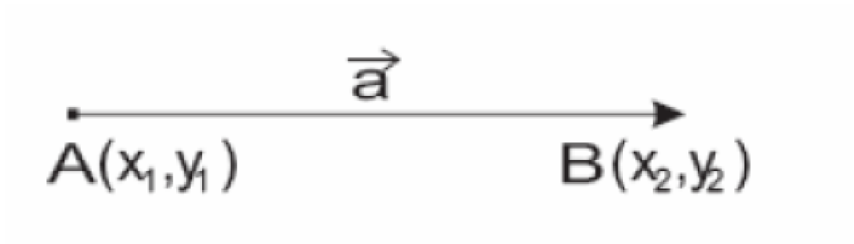
$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j}$ ili jednostavnije $\vec{a} = (a_1, a_2)$; intenzitet je $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\vec{i}$ i $\vec{j}$ su jedinični vektori (ortovi) koji služe za izražavanje drugih vektora.

$\vec{i}$=(1,0) i intenzitet ovog vektora je $|\vec{i}|$=1

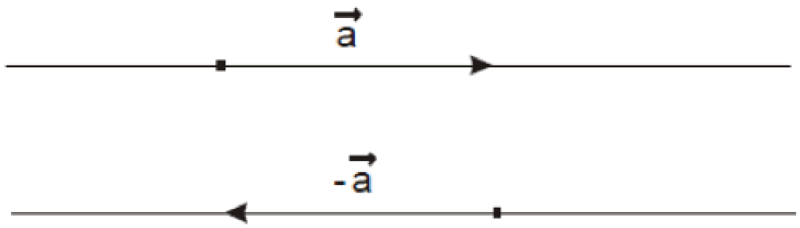
$\vec{j}$=(0,1) i takodje je $|\vec{j}|$=1

Kako izraziti vektor ako su date koordinate njegovog početka i kraja?



$\vec{a}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ i njegov intenzitet je onda $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Svaki vektor ima svoj **suprotan vektor**, koji ima isti pravac i intenzitet ali suprotan smer sa početnim vektorom.



$-\vec{a}+\vec{a}=0$ i $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

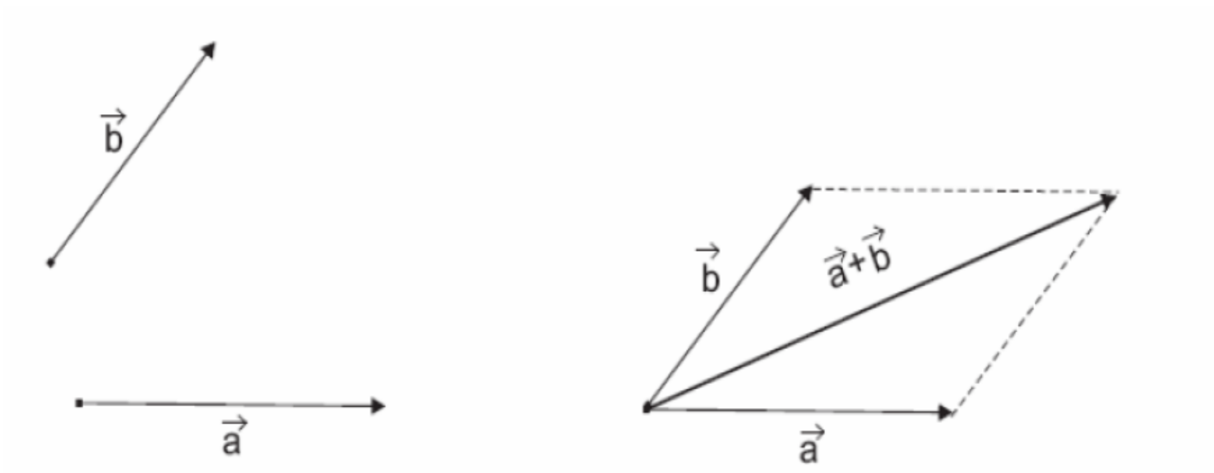
Nula vektor $\vec{0}$ je onaj čiji se početak i kraj poklapaju.

Sabiranje i oduzimanje vektora

Za sabiranje i oduzimanje vektora imamo dva pravila:

1) Pravilo paralelograma

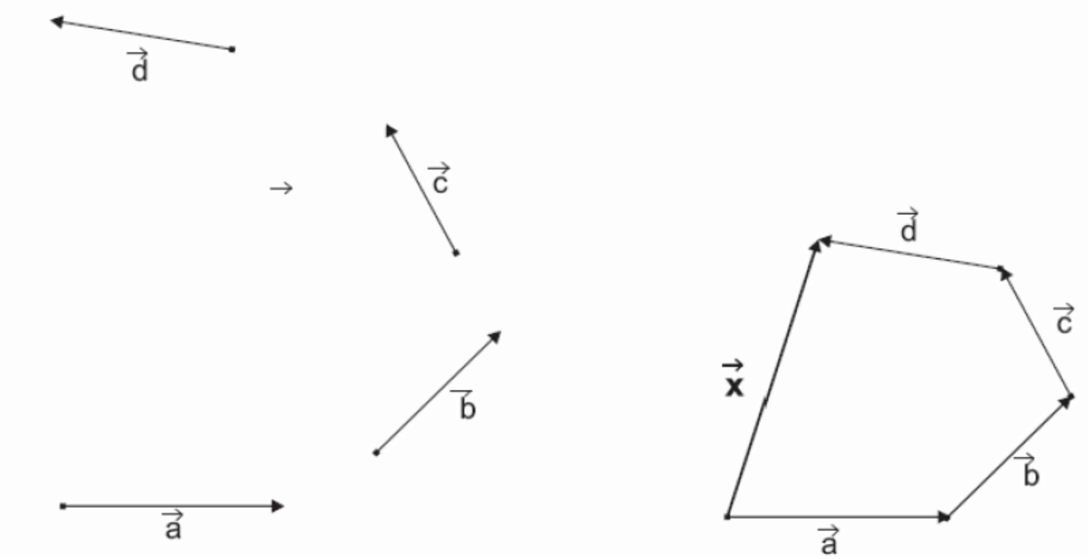
Dva data vektora dovedemo na zajednički početak paralelnim pomeranjem.Nad njima kao stranicama oformimo paralelogram. Dijagonala paralelograma je njihov zbir (ona dijagonala koja polazi iz sastava ta dva vektora).



2) Pravilo poligona (nadovezivanja)

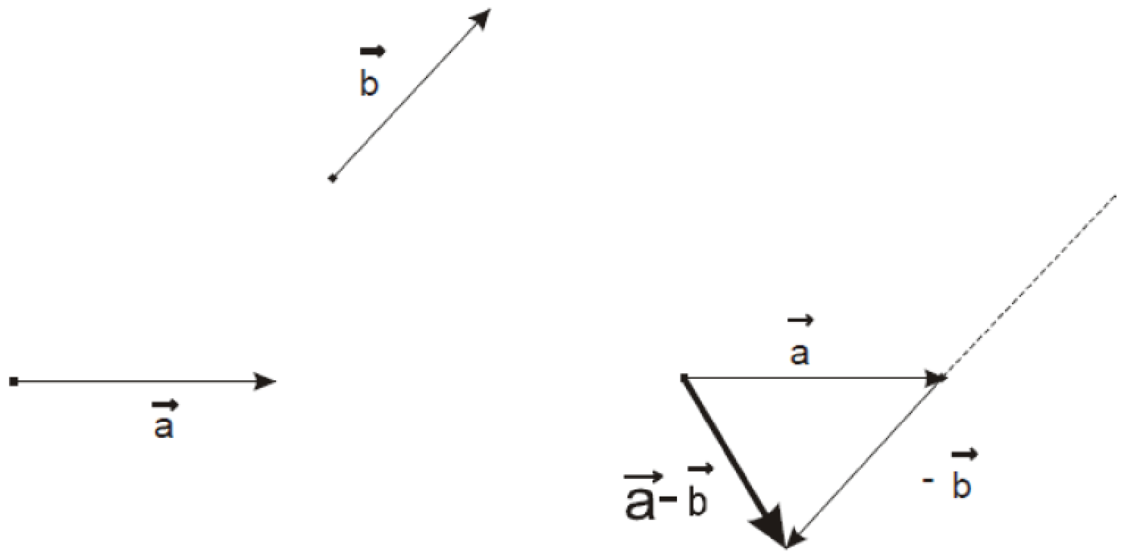
Na kraj prvog vektora paralelnim pomeranjem dovedemo početak drugog, na kraj drugog dovedemo početak trećeg vektora......

Rezultanta (njihov zbir) je vektor koji spaja početak prvog i kraj zadnjeg vektora.



Kako oduzeti dva vektora?

Recimo da su dati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$,.Postupak je sličan kao kod sabiranja vektora(pravilo nadovezivanja) samo što umesto vektora $+\vec{b}$ na kraj prvog nanosimo - $\vec{b}$.



Računski sabiranje i oduzimanje vektora ide vrlo lako:

Ako je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ to jest $\vec{a} = (a_1, a_2)$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, to jest $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

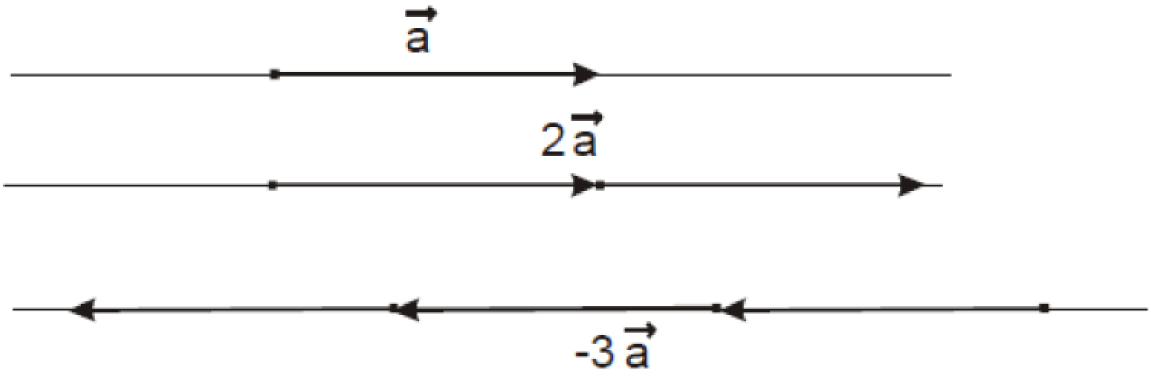
Dakle, radimo tako što saberemo (oduzmemo) koordinatu sa koordinatom.

Proizvod skalara k i vektora $\vec{a}$ je vektor k$\vec{a}$ (ili $\vec{a}$k) koji ima isti pravac kao vektor $\vec{a}$, intenzitet $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$ i smer:

- isti kao vektor $\vec{a}$ ako je k>0
- suprotan od vektora $\vec{a}$ ako je k<0

Primer: Dat je vektor $\vec{a}$, nadji : $2\vec{a}$ i $-3\vec{a}$

Rešenje:



Linearna zavisnost vektora

Ako su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ realni brojevi i $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ vektori različiti od nule, onda se zbir:

$$k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{x_n}$$

zove **linearna kombinacija** vektora $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$

Izjednačimo ovu linearnu kombinaciju sa nulom:

$$k_1\overrightarrow{x_1} + k_2\overrightarrow{x_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{x_n} = 0$$

i) Ako je $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$, onda su vektori $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ **linearno nezavisni**

ii) Ako je bar jedan od $k_1, k_2, \ldots, k_n$ različit od nule onda su vektori $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ **linearno zavisni**

Važi još:

Dva vektora su **kolinearna** ako i samo ako su linearno zavisni (kolinearni znači da leže na istoj pravoj).

Vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ su **komplanarni** ako i samo ako su linearno zavisni (komplanarni znači da leže u istoj ravni).

Razlaganje vektora na komponente

Ako su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ linearno nezavisni vektori jedne ravni, onda za svaki vektor $\vec{z}$ te ravni ,postoje jedinstveni brojevi p i q takvi da je :

$$\vec{z} = p\vec{x} + q\vec{y}$$

Primer:

Vektor $\vec{v}$=(4,2) razložiti po vektorima $\vec{a}$=(2,-1) i $\vec{b}$ = (-4,3)

<u>Rešenje:</u>

$\vec{v} = p\vec{a} + q\vec{b}$

(4,2) = p(2,-1) + q(-4,3)
(4,2) = (2p,-p) + (-4q,3q)

Odavde pravimo sistem:

4=2p – 4q
2=-p + 3q

2p –4q = 4
-p + 3q = 2

p – 2q = 2
-p+3q = 2

q = 4

2p-4q = 4 , pa je 2p – 16 = 4 , pa 2p = 20 i konačno p = 10 .

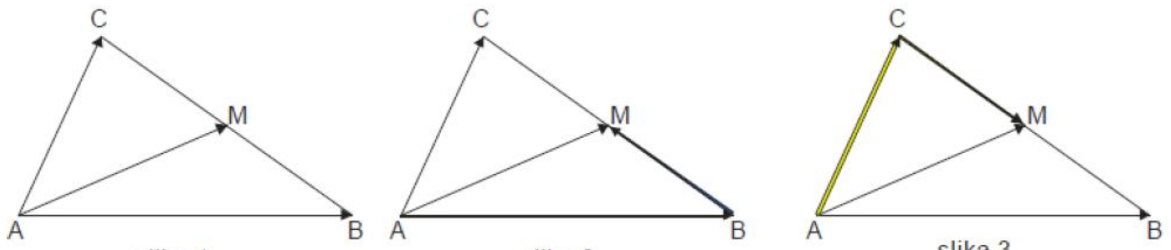
Dakle, razlaganje vektora je $\vec{v} = 10\vec{a} + 4\vec{b}$

Primer 1

Tačka M je središte stranice BC trougla ABC. Dokazati da je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

<u>Rešenje:</u>

Nacrtajmo najpre sliku i postavimo problem...



slika 1. slika 2. slika 3.

Kod ovakvog tipa zadataka vektor u sredini izrazimo na obe strane!

Na slici 2. je vektor AM izražen (plavom putanjom) preko: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$.

Na slici 3. je vekor AM izražen (žuta putanja) preko: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$

Dalje ćemo ove dve jednakosti napisati jednu ispod druge i sabrati ih:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$$
$$\underline{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}}$$

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$ pretumbamo malo

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$ pogledajmo zadnja dva vektora na slici...suprotni su , pa je $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=0$

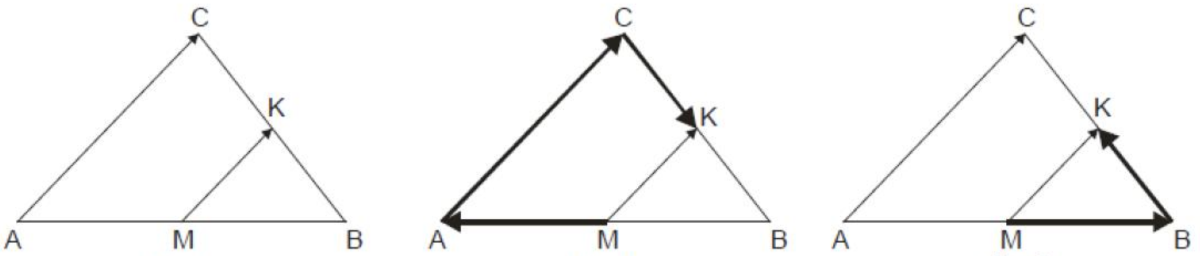
$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

Primer 2

U trouglu ABC tačke M i K su središta stranica AB i BC. Dokazati da je $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MK}$

Rešenje:

Opet mora slika:



slika 1. slika 2. slika 3.

Na slici 2. idemo ulevo: $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$

Na slici 3. idemo udesno: $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$

Napišemo jednakosti jednu ispod druge i saberemo ih:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$$
$$\underline{\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}}$$
$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}$$

Sad pogledamo sliku i uočimo suprotne vektore (istog pravca i intenziteta a suproznog smera).

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AC} + \boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}} + \boxed{\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CK}}$$

Uokvireni su nula vektori, pa je:

$$2\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AC}$$

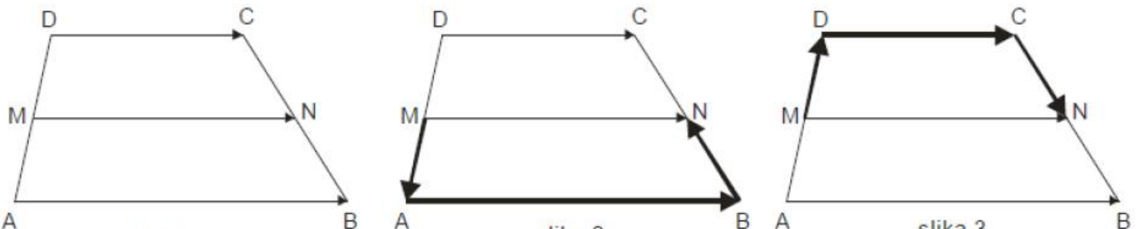
Primer 3

Dat je trapez ABCD. Ako je M središte stranice AD, a N središte stranice BC, tada je $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

Dokazati.

<u>Rešenje:</u>

Ovo je ustvari dokaz činjenice da je srednja linija trapeza jednaka polovini zbira osnovica $m = \frac{a+b}{2}$



slika 1. slika 2. slika 3.

Najpre ćemo vektor MN izraziti odozdo (slika 2.) pa odozgo (slika 3.), pa to sabrati…

$$\overrightarrow{MN} = \cancel{\overrightarrow{MA}} + \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{BN}}$$
$$\overrightarrow{MN} = \cancel{\overrightarrow{MD}} + \overrightarrow{DC} + \cancel{\overrightarrow{CN}}$$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ suprotni vektori se potiru, to jest daju nula vektor

Još da celu jednakost podelimo sa 2 i dobijamo $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.

Zadaci za vežbu

Zbirka 485-492